

Notas de Aula

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Matemática B - Em Ação
gustavo.sarturi@ufpr.br

1 Matrices

Definição 1.1. Uma matriz $A_{m \times n}$ é um arranjo retangular de $m \cdot n$ números reais (ou complexos) organizados em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A i -ésima linha de A é:

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}]_{1 \times n} \quad i \in \mathbb{Z} \mid (1 \leq i \leq m)$$

A j -ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Dizemos que A é m por n , e denotamos por $m \times n$. Se $m = n$ dizemos que A é uma **Matriz Quadrada de ordem n** e que $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A . Denotaremos por a_{ij} o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de uma matriz. Frequentemente, denotaremos uma matriz A por:

$$A = [a_{ij}] = (a_{ij})$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

temos que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$. Os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} formam o conjunto da diagonal principal da matriz.

Definição 1.2. A diagonal principal de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i = j$.

Definição 1.3. A diagonal secundária de uma matriz quadrada é o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$

Em nosso exemplo, a_{13} , a_{22} a_{31} são os elementos do conjunto da diagonal secundária.

Definição 1.4. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ é denominada **matriz diagonal**. Em particular, se todos os elementos da diagonal forem 1, i.e., $a_{ij} = 1$ para $i = j$, denominamos **matriz identidade**.

Definição 1.5. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$, $c \in \mathbb{R}$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ é denominada **matriz escalar**.

Exemplo 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2019 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

No exemplo acima, A é uma matriz diagonal e B é uma matriz diagonal identidade, ou simplesmente, identidade. Pela relevância da matriz identidade, geralmente denotamos ela por I_d para indicar matriz identidade. As matrizes B e C são exemplos de matrizes escalares.

Definição 1.6. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita **Matriz Nula** se todos os seus elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo i e todo j .

Definição 1.7. Uma matriz $B = [b_{ij}]$, de dimensão $m \times n$ é dita ser **oposta** de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ se $b_{ij} = -a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Definição 1.8. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é dita ser **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição 1.9. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m \times n$ é dita ser **anti-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (1)$$

A é uma matriz **simétrica** e B é uma matriz **anti-simétrica**.

Definição 1.10. Duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, do tipo $m \times n$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Isto é, se todos os elementos correspondentes são iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = I_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

são iguais se $w = -1, x = -3, y = 0$ e $z = 5$

1.1 Adição de Matrizes

Definição 1.11. Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, a soma de A e B gera uma matriz $C = [c_{ij}]$ definida por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Em outras palavras, bem no estilo matemática de bar, C é obtida somando-se os elementos correspondentes de A e de B.

Teorema 1.1. Seja $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$ de mesma dimensão, ou seja, todas do tipo $m \times n$.

A soma de matrizes satisfazem as seguintes operações:

1. *Associativa*: $A + B = B + A$
2. *Comutativa*: $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. *Existe um elemento neutro, no caso, a matriz nula*. $A + [0] = A$, onde $[0]$ é a matriz nula de mesma dimensão de A .
4. *Existe um elemento simétrico, no caso, a **matriz oposta** à matriz A' que é tal que $A + A' = 0$.*

A demonstração fica à cargo do leitor. Quaisquer dúvidas, consultar o autor das notas de aula, que no caso, sou eu.

Exemplo 1.3.

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 47 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 20+7 & 0+0 & 1+2 \\ 0+0 & 5+2 & 3+4 \\ 3+4 & 2+1 & 50+47 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 27 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 7 & 3 & 97 \end{bmatrix}$$

Definição 1.12. Se A e B são matrizes de mesma dimensão ($m \times n$), escrevemos $A + (-B)$ como $A - B$, chamamos essa operação de **diferença** (ou subtração) de duas matrizes.

Em essência, a definição acima nos diz que subtrair uma matriz com a outra é somar uma matriz com a oposta da outra.

1.2 Produto de escalar por Matriz

Definição 1.13. Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ é um número Real), então, o produto escalar por Matriz A (ou múltiplo escalar de A por λ) é uma matriz $B = [b_{ij}]$ tal que

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Exemplo 1.4. Se:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

e $\lambda = 3$, temos então que:

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 & 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 9 \\ 6 & 15 & 0 \\ 9 & 18 & -6 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2. Dados α, β números reais, A , e B matrizes de mesma dimensão ($m \times n$), o produto de escalar por matrizes satisfaz as seguintes operações:

1. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$
2. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
4. $1 \cdot A = A$

1.3 Produto Matricial

Definição 1.14. Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ definimos **Produto Matricial** de A por B , e denotamos por AB como sendo uma matriz $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Observações:

1. A definição garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B , pois, A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.
2. A definição ainda nos afirma que o produto AB gera uma matriz que possui o número de linhas de A e o número de colunas de B .

Para ficar mais prático, vamos exemplificar como se realiza o produto de duas matrizes. Geralmente, à primeira vista, o produto de matrizes parece ser confuso, por essa razão, vamos omitir formalidades, pelo menos, por hora:

Exemplo 1.5. Dadas as matrizes abaixo, calcular o produto AB :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, deixamos as matrizes uma do lado da outra como de costume:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix}$$

Note que A é uma matriz 2×2 e B é uma matriz 2×2 , logo, o produto vai gerar uma matriz 2×2 . A pergunta é, como obter os elementos $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Como visto na definição, o elemento $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, ou seja, elemento a elemento, primeira linha de A por primeira coluna de B , no caso:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14 = 19$$

Repetimos o processo agora para determinar o elemento c_{12} , ou seja, elemento a elemento, primeira linha de A por segunda coluna de B , no caso:

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2019 = 6 + 4038 = 4044$$

Novamente para c_{21} e c_{22} , onde calcularemos, respectivamente, elemento a elemento, segunda linha de A por primeira coluna de B e, segunda linha de A por segunda coluna de B :

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 15 + 28 = 43$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2019 = 18 + 8076 = 8094$$

Logo, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2019 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 2019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4044 \\ 43 & 8094 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.3. *O produto matricial (ou multiplicação de matrizes) satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *É associativa, ou seja: $(AB)C = A(BC)$
quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ e $C = [c_{kl}]_{p \times r}$*
2. *É distributiva à direita em relação à Adição, ou seja: $(A + B)C = AC + BC$
quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{jk}]_{n \times p}$*
3. *É distributiva à esquerda em relação à Adição, ou seja: $C(A + B) = CA + CB$
quaisquer que sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{ki}]_{p \times m}$*
4. *$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
quaisquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$ (em particular para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$) e as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$*

A demonstração fica à cargo dos curiosos.

Observações importantes! É muito, mas muito importante lembrar que o produto matricial não é comutativo, ou seja, nem sempre $AB = BA$.

1. Há casos em que existem AB mas não existem BA . Isto ocorre quando A é do tipo $m \times n$ e B é $n \times p$, com $m \neq p$:

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = (AB)_{m \times p} \qquad B_{n \times p} A_{m \times n} \Rightarrow \nexists BA$$

2. Há casos em que existem AB e BA , porém, são matrizes de tipos diferentes, logo, $AB \neq BA$. Isto ocorre quando A é uma matriz do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times m$ com $m \neq n$:

$$A_{m \times n} B_{n \times m} = (AB)_{m \times m} \qquad B_{n \times m} A_{m \times n} \Rightarrow \exists (BA)_{n \times n}$$

3. Mesmos nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo (o que ocorre quando A e B são quadradas e de mesma ordem), temos na maioria das vezes que $AB \neq BA$.
4. É importante observar também que $AB = 0$ **NÃO** implica **necessariamente** que $A = 0$ ou $B = 0$, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo o produto é a matriz nula. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

1.4 Matriz Transposta

Definição 1.15. *Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, a matriz **transposta** de A , denotada por A^T é uma matriz $n \times m$ tal que $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.*

Note que a dimensão das matrizes, em geral, exceto no caso em que $m = n$, são diferentes!

Exemplo 1.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

É como se você “deitasse” a matriz.

Teorema 1.4. *Se A e B são matrizes e λ um número real qualquer, então:*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
4. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
5. $|A^T| = |A|$, ou seja, $\det(A^T) = \det(A)$

Observações: Apesar de não termos enunciado ainda o que é a função determinante ($\det(A)$ ou $|A|$), optei por destacar essa propriedade no momento e darei mais ênfase mais tarde.

Faça exemplos numéricos para verificar que é verdade, se você tiver mais prática, prove formalmente.

A propriedade 3 do Teorema 1.4. é muito utilizada, lembre-se muito bem dela!

Estas notas de aulas ainda estão sendo construídas