Modelagem Matemática das Equações de Euler

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
gustavo.sarturi@ufpr.br

Prof. Dr. Roberto Ribeiro
Departamento de Matemática - UFPR

De maneira intuitiva, um fluido é qualquer substância que tem a propriedade de adquirir a forma do recipiente que o contém. De forma rigorosa podemos caracterizar os fluidos como substâncias que possuem baixa resistência às deformações que preservam volume, por exemplo, água, petróleo e gás. Uma característica física relevante dos fluidos é a viscosidade, a qual pode ser interpretada como uma medida da fricção entre suas partículas. Informalmente podemos dizer que a viscosidade mede o quão "grudento" é o fluido. Todo fluido possui uma certa viscosidade, porém em determinados problemas reais é possível modelar o comportamento do fluido sob a hipótese que este possui viscosidade zero – neste caso dizemos que o fluido é ideal.

O objetivo deste trabalho é apresentar a modelagem matemática das equações de Euler, às quais governam a dinâmica de um fluido ideal. As equações de Euler consistem de um sistema de equações diferenciais parciais não linear e são apresentadas abaixo:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla(\rho\vec{u}) = -\nabla P + \rho\vec{b} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde ρ é a densidade, P é a pressão, $\vec{u}$ o vetor velocidade, t o tempo e $\vec{b}$ um tipo de força qualquer, um exemplo desta força seria a gravidade por unidade de massa. Fisicamente essas equações referem-se a conservação da quantidade de movimento e conservação de massa, respectivamente.

As equações de Euler apareceram pela primeira vez num artigo publicado por Leonard Euler em 1757 intitulado "Principes généraux du mouvement des fluides" (Princípios Gerais dos Movimentos de Fluídos). A modelagem matemática das equações de Euler podem ser feita por meio de duas formulações (ou metodologia), a saber, via formulação Euleriana ou Lagrangeana.

Na formulação Euleriana, fixamos uma região de domínio do fluido e medimos as grandezas do escoamento (densidade, pressão e velocidade) para todo instante de tempo nesta região. Já na formulação Lagrangeana, as grandezas do escoamento são especificadas em uma região do fluido que varia ao longo do fluxo.

Neste estudo foi-se estabelecido estudar norteando-se pela Formulação Euleriana, e, a razão para isso deve-se ao fato desta ser mais simples, pois as ferramentas principais necessárias para sua compreensão são os teoremas clássicos de análise vetorial (tais como Teorema de Stokes e Divergência) vistos nos cursos de cálculo.

Deste modo, fixada uma região W de interesse, deduziremos às equações de Euler baseados em dois princípios físicos:

- Conservação de massa: A massa não é criada e nem destruída;
- Conservação da quantidade de movimento: A taxa de variação de movimento de uma porção do fluído é igual a força resultante nele.

A massa de porção de fluído que ocupa a região W no instante t é dada por:

$$m(W,t) = \int_W \rho(\vec{x},t)\ dV \tag{2}$$

onde $\rho(\vec{x},t)$ é a densidade do fluído e dV o elemento de volume no plano ou no espaço. Como nesta formulação, a região de domínio W é fixa, não se altera com o tempo, então a taxa de variação de massa em W é

$$\frac{d}{dt}m(W,t) = \int_W \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t)\ dV \tag{3}$$

Por outro lado, seja ∂W a fronteira de W, a massa de fluído que passa através de ∂W por unidade de tempo é determinada pela integral abaixo

$$\int_{\partial W} (\rho\vec{u})\cdot\vec{n}\ dA \tag{4}$$

onde dA é a unidade de área, $\vec{u}$ é o campo velocidade e $\vec{n}$ é o vetor normal unitário apontando para fora. Essa interpretação física da integral pode ser obtida facilmente fazendo os estudos das unidades.

Note que

- Se a massa dentro de W está aumentando, então

$$\frac{d}{dt}m(W,t) \geq 0 \quad e \quad \int_{\partial W} (\rho\vec{u})\cdot\vec{n}\ dA \leq 0 \tag{5}$$

- Analogamente, se a massa dentro de W está diminuindo, então

$$\frac{d}{dt}m(W,t) \leq 0 \quad e \quad \int_{\partial W} (\rho\vec{u})\cdot\vec{n}\ dA \geq 0 \tag{6}$$

O Princípio de Conservação da massa afirma que o crescimento de massa dentro de W é igual a taxa na qual a massa está atravessando a fronteira na direção interior de W, disto, obtemos a equação

$$\int_W \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_{\rho W} (\rho\vec{u})\cdot\vec{n}\ dS \tag{7}$$

que é a forma intergral do princípio de conservação de massa. A sua forma diferencial é encontrada utilizando-se do Teorema da Divergência e, após alguns cálculos chega-se a conclusão que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \tag{8}$$

representa a forma diferencial do princípio de conservação de massa, também conhecida como equação da continuidade.

Às equações que preservam a quantidade de movimento são deduzidas seguindo princípios das Leis de Newton.

A quantidade de movimento relaciona a massa de um corpo com a sua velocidade, e, pela Física, é dada por $\vec{Q} = m\vec{v}$, onde m é a massa e $\vec{v}$ é a velocidade. Considerando o mesmo domíno fixo W, a força total exercida sobre o fluído dentro de W através da fronteira ∂W é dada por

$$\vec{F}_S = -\int_{\partial W} p(\vec{x},t)\vec{n}\ dA \tag{9}$$

onde p é a pressão exercida pelo fluído. Como $\vec{n}$ aponta pra fora, essa é a razão pela qual a equação acida é negativa. Tomando um vetor $\vec{e}$ unitário apontando para uma direção fixa qualquer, ao calcular $\vec{e}\cdot\vec{F}_S$ e aplicando o Teorema da Divergência, obtemos o seguinte resultado

$$-\int_W \nabla\cdot\rho\ dV \tag{10}$$

que de fato, verificando as unidades, é a força. No entanto, tomando $\vec{b}(\vec{x},t)$ uma força externa por unidade de massa agindo sobre o fluído, temos

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \int_W \rho(\vec{x},t)\ b(\vec{x},t)\ dV \tag{11}$$

um exemplo frequente de força $\vec{b}$ é a gravidade por unidade de massa. Sendo assim, a força resultando agindo sobre W é dada por

$$\vec{F}_R = -\int_W \nabla p\ dV + \int_W \rho\vec{b}\ dV \tag{12}$$

assim, a força resultante por unidade de volume é igual a $-\nabla p + \rho\vec{b}$. Porém, pela 2° Lei de Newton, $\vec{F} = m\ t\vec{a}$, assim

$$\vec{F}_R = \int_W \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}\ dV \tag{13}$$

Juntando as relações de ingualdade e expandindo a derivada material, obtemos no entanto que

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla(\rho\vec{u}) = -\nabla p + \rho\vec{b} \tag{14}$$

note que acima temos três equações, das quais ficarão mais claras na sua versão integral do balanço de quantidade de movimento apresentadas abaixo

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho\vec{u}\ dW = -\int_{\partial W} \left((\vec{u}\cdot\vec{n})\,\rho\vec{u} + p\vec{n}\right)\ dA + \int_W \rho\vec{b}\ dV \tag{15}$$

A primeira parcela representa a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento, enquanto que a segunda, o fluxo da quantidade de movimento na fronteira e a terceira parcela, o efeito das forças de massa externa.

Os detalhes das deduções é o tema central da apresentação. Neste estudo foi-se estabelecido estudar norteando-se pela Formulação Euleriana, e, a razão para isso deve-se ao fato desta ser mais simples, pois as ferramentas principais necessárias para a sua compreensão são os teoremas clássicos de análise vetorial (tais como Teorema de Stokes e Divergência) vistos nos cursos de cálculo. A escolha por essa técnica permitiu abordar o tema de modo a torná-lo mais compreensível possível para estudantes de graduação de Matemática e áreas afins.

Referências

[1] NACHBIN, André. **Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2001. 110 p.

[2] NACHBIN, André. **Notas de aula do curso de Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2001. 110 p.