

# Modelagem Matemática das Equações de Euler

Gustavo Henrique Silva Sarturi  
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR  
*gustavo.sarturi@ufpr.br*

Prof. Dr. Roberto Ribeiro  
Departamento de Matemática - UFPR

De maneira intuitiva, um fluido é qualquer substância que tem a propriedade de adquirir a forma do recipiente que o contém. De forma rigorosa podemos caracterizar os fluidos como substâncias que possuem baixa resistência às deformações que preservam volume, por exemplo, água, petróleo e gás. Uma característica física relevante dos fluidos é a viscosidade, a qual pode ser interpretada como uma medida da fricção entre suas partículas. Informalmente podemos dizer que a viscosidade mede o quão “grudento” é o fluido. Todo fluido possui uma certa viscosidade, porém em determinados problemas reais é possível modelar o comportamento do fluido sob a hipótese que este possui viscosidade zero – neste caso dizemos que o fluido é ideal.

O objetivo deste trabalho é apresentar a modelagem matemática das equações de Euler, às quais governam a dinâmica de um fluido ideal. As equações de Euler consistem de um sistema de equações diferenciais parciais não linear e são apresentadas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\rho \vec{u}) = -\nabla P + \rho \vec{b} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \end{array} \right.$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $P$  é a pressão,  $\vec{u}$  o vetor velocidade,  $t$  o tempo e  $\vec{b}$  uma força externa por unidade de massa, por exemplo, a gravidade. Fisicamente essas equações referem-se a conservação da quantidade de momento e conservação de massa, respectivamente.

As equações de Euler apareceram pela primeira vez num artigo publicado por Leonard Euler em 1757 intitulado “Principes généraux du mouvement des fluides” (Princípios Gerais dos momentos de fluidos). A modelagem matemática das equações de Euler podem ser feita por meio de duas formulações (ou metodologia), a saber, via formulação Euleriana ou Lagrangeana.

Na formulação Euleriana, fixamos uma região no domínio do fluido e medimos as grandezas do escoamento (densidade, pressão e velocidade) para todo instante de tempo nesta região. Já na formulação Lagrangeana, Definimos uma região material, isto é, um conjunto de partículas que serão seguidas no decorrer do tempo. Aconteça o que acontecer estaremos sempre acompanhando esse conjunto de partículas.

Neste estudo foi-se estabelecido estudar norteando-se pela Formulação Euleriana, e, a razão para isso deve-se ao fato desta ser mais simples, pois as ferramentas principais necessárias para sua compreensão são os teoremas clássicos de cálculo vetorial (tais como Teorema de Stokes e Divergência) vistos nos cursos de cálculo.

Deste modo, fixada uma região  $W$  de interesse, deduziremos às equações de Euler baseados em dois princípios físicos:

- Conservação de massa: A massa não é criada e nem destruída;
- Conservação da quantidade de momento: A taxa de variação de momento de uma porção do fluido é igual a força resultante nele.

A massa de porção de fluido que ocupa a região  $W$  no instante  $t$  é dada por:

$$m(W, t) = \int_W \rho(\vec{x}, t) dV,$$

onde  $\rho(\vec{x}, t)$  é a densidade do fluido e  $dV$  o elemento de volume no plano ou no espaço. Como nesta formulação, a região de domínio  $W$  é fixa, não se altera com o tempo, então a taxa de variação de massa em  $W$  é

$$\frac{d}{dt}m(W, t) = \int_W \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) dV.$$

Por outro lado, seja  $\partial W$  a fronteira de  $W$ , a massa de fluido que passa através de  $\partial W$  por unidade de tempo é determinada pela integral abaixo

$$\int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n} dA,$$

onde  $dA$  é a unidade de área,  $\vec{u}$  é o campo velocidade e  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário apontando para fora. Essa interpretação física da integral pode ser obtida facilmente fazendo os estudos das unidades.

Note que:

- Se a massa dentro de  $W$  está aumentando, então

$$\frac{d}{dt}m(W, t) \geq 0 \quad e \quad \int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n} dA \leq 0.$$

- Analogamente, se a massa dentro de  $W$  está diminuindo, então

$$\frac{d}{dt}m(W, t) \leq 0 \quad e \quad \int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n} dA \geq 0.$$

O Princípio de Conservação da massa afirma que o crescimento de massa dentro de  $W$  é igual a taxa na qual a massa está atravessando a fronteira na direção interior de  $W$ , disto, obtemos a equação

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial W} (\rho\vec{u}) \cdot \vec{n} dS,$$

que é a forma intergral do princípio de conservação de massa. A sua forma diferencial é encontrada utilizando-se do Teorema da Divergência e, após alguns cálculos chega-se a conclusão que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0.$$

Esta é a forma diferencial do princípio de conservação de massa, também conhecida como equação da continuidade.

As equações que preservam a quantidade de momento são deduzidas seguindo princípios da 2ª Lei de Newton.

A quantidade de momento relaciona a massa de um corpo com a sua velocidade, e é dada por  $\vec{Q} = m\vec{v}$ , onde  $m$  é a massa e  $\vec{v}$  é a velocidade. Daí, é fácil ver que  $\frac{d\vec{Q}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_R$ .

Considerando o mesmo domínio fixo  $W$ , a força total exercida sobre o fluido dentro de  $W$  através da fronteira  $\partial W$  é dada por

$$\vec{F}_S = - \int_{\partial W} p(\vec{x}, t) \vec{n} dA$$

onde  $p$  é a pressão exercida pelo fluido. Como  $\vec{n}$  aponta pra fora, essa é a razão pela qual a equação acima é negativa. Tomando um vetor  $\vec{e}$  unitário apontando para uma direção fixa qualquer, ao calcular  $\vec{e} \cdot \vec{F}_S$  e aplicando o Teorema da Divergência, obtemos o seguinte resultado

$$- \int_W \nabla p dV$$

que de fato, verificando as unidades, é a força. Tomando  $\vec{b}(\vec{x}, t)$  uma força externa por unidade de massa agindo sobre o fluido, temos

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dV,$$

um exemplo frequente de força  $\vec{b}$  é a gravidade por unidade de massa. Sendo assim, a força resultando agindo sobre  $W$  é dada por

$$\vec{F}_R = - \int_W \nabla p dV + \int_W \rho \vec{b} dV.$$

Consequentemente, a força resultante por unidade de volume é igual a  $-\nabla p + \rho \vec{b}$ . Porém, pela 2ª Lei de Newton,  $\vec{F} = m \vec{a}$ , assim

$$\vec{F}_R = \int_W \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV.$$

Juntando as relações de igualdade e expandindo a derivada material, obtemos que

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla (\rho \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{b},$$

esta é a forma diferencial da conservação do momento. O porquê desta equação ser uma conservação do momento fica mais claro quando vemos a sua forma integral.

Os detalhes das deduções é o tema central deste trabalho. A técnica abortada permitiu abordar o tema de modo a torná-lo mais compreensível possível para estudantes de graduação de Matemática e áreas afins.

## Referências

- [1] NACHBIN, André. **Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2001. 110 p.
- [2] NACHBIN, André. **Notas de aula do curso de Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2001. 110 p.