LISTA DE EXERCÍCIOS – POTÊNCIAS E RAÍZES

Definição de Potência de expoente natural:

Seja $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ definimos potência de base a e expoente n o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^* \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n \mid n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Decorre então da definição que: Sendo n um número natural e $n \geq 2$, temos no entanto que a^n é o produto de n fatores iguais a a, no caso:

$$a^n = a^{n-1} \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a\ (n\ vezes)$$

Propriedades: *As demonstrações das propriedades serão omitidas no momento, sendo apresentadas em sala de aula e/ou deixada para um futuro anexo.*

[P$_1$] $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

[P$_2$] $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ para $a \neq 0$ e $m \geq n$

[P$_3$] $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ com $b \neq 0$ ou $n \neq 0$

[P$_4$] $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

[P$_5$] $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

EXERCÍCIOS: *Exercícios com a seta $\Rrightarrow$ foram elaborados por Gustavo Sarturi. Exercícios com $[P^*]$ indicado, são exercícios que mostrarão novas propriedades, é bom destaca-los pois são consequências de outras propriedades e poderão ser úteis em cálculos futuros. Exercícios com [H] indica que é um exercício um pouco desafiador, em caso de estar em negrito $[\boldsymbol{H}]$ requer certa habilidade (difícil, mas não impossível hehe);*

1. $\Rrightarrow$ $[p^*]$ Utilizando as propriedades apresentadas, mostre que $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*$

2. Calcule:

a) $(-3)^3$

b) $(-2)^1$

c) 3^4

d) 1^7

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$

i) -2^3

j) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

k) $(-1)^{10}$

l) $(-1)^{13}$

m) 0^7

n) $(-4)^0$

o) -5^0

p) $-(-1)^{15}$

3. Se $n \in \mathbb{N}$, calcule $A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{3n} - (-1)^n$

4. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$

b) $\frac{3^6}{3^2} = 3^3$

c) $2^3 \cdot 3 = 6^3$

d) $(2+3)^4 = 2^4 + 3^4$

e) $(5^3)^2 = 5^6$

f) $(-2)^6 = 2^6$

g) $\frac{2^7}{2^5} = (-2)^2$

h) $5^2 - 4^2 = 3^2$

5. Simplifique:

a) $(a^4b^3)^3(a^2b)^2$

b) $(a^2b^3)^2(a^3b^2)^3$

c) $[(a^3b^2)^2]^3$

d) $\left(\frac{a^4b^3}{a^2b}\right)^5$

e) $\frac{(a^2b^3)^4(a^3b^4)^2}{(a^3b^2)^3}$

f) $\frac{(a^4b^2)^3}{(ab^2)^2}$

6. Se a e b são números reais, então, em que condições $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

7. Determine o menor número inteiro positivo x para que $2940x = M^3$, que que M é um número inteiro.

8. ⇛ $[p^*]$ Dado um número real a, não nulo, e um número n natural, mostre que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

9. ⇛ $[p^*]$ Dado $a \in \mathbb{R}^*$ e $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$, mostre que:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Dica: Utilize da propriedade $[P_2]$

10. Calcule o valor das expressões:

a) $\frac{2^{-1}-(-2)^2+(-2)^{-1}}{2^2-2^{-2}}$

b) $\frac{3^2-3^{-2}}{3^2+3^{-2}}$

c) $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3}$

9. Calcule:

a) 3^{-1}

b) $(-2)^{-1}$

c) -3^{-1}

d) $-(-3)^{-1}$

e) 2^{-2}

f) $(-3)^{-2}$

g) -5^{-2}

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

k) $-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

l) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

m) $(0{,}1)^{-2}$

n) $(0{,}25)^{-3}$

o) $(-0{,}5)^{-3}$

p) $(0{,}75)^{-2}$

q) $\frac{1}{2^{-3}}$

r) $\frac{1}{(0{,}2)^{-2}}$

s) $\frac{1}{(-3)^{-2}}$

t) $\frac{1}{(0{,}01)^{-2}}$

10. Remova os expoentes negativos e simplifique a expressão onde $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}$$

11. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a) $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$

b) $2^{-4} = -16$

c) $(\pi+2)^{-2} = \pi^{-2} + 2^{-2}$

⇛d) $(\pi+2)^2 = \pi^2 + 2\pi + 4$

e) $3^{-4} \cdot 3^5 = \frac{1}{3}$

f) $\frac{7^{-2}}{7^{-5}} = \frac{1}{7^3}$

g) $\frac{5^2}{5^{-6}} = 5^8$

h) $2^{-1} - 3^{-1} = 6^{-1}$

i) $\pi + \pi^{-1} = 1$

j) $(2^{-3})^{-2} = 2^6$

k) $3^2 \cdot 3^{-2} = 1$

⇛l) $\pi^\pi \cdot \pi^\pi = \pi^{2\pi}$

⇛m) $\pi^{-e} \cdot \pi^{-\pi} \cdot \pi^{-\phi} = \frac{1}{\pi^{e\pi\phi}}$

12. Se $a \cdot b \neq 0$, simplifique:

a) $\frac{(a^3b^{-2})^{-2}}{(a^{-4}b^3)^3}$

b) $(a^{-2}b^3)^{-2}(a^3b^{-2})^3$

c) $\frac{(a^5b^3)^2}{(a^{-4}b)^{-3}}$

d) $[(a^2b^{-3})^2]^{-3}$

e) $\left(\frac{a^3b^{-4}}{a^{-2}b^2}\right)^3$

f) $\frac{(a^3b^{-2})^{-2}(ab^{-2})^3}{(a^{-1}b^2)^{-3}}$

g) $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$

h) $(a^{-2}-b^{-2})(a^{-1}-b^{-1})^{-1}$

13. Se $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}^*$, simplifique as expressões:

a) $(a^{2n+1}a^{1-n}a^{3-n})$

b) $a^{2n+3}a^{n-1}a^{-(2(n-1))}$

c) $\frac{a^{2(n+1)}a^{3-n}}{a^{1-n}}$

d) $\frac{(a^{n+4}-a^3a^n)}{a^4a^n}$

14. ⇛ Se $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Suponhamos que dado a^m e m do tipo $m = 2n$ (par) e a^p do tipo $p = 2n+1$, desenvolva uma conclusão quando ao sinal dos resultados finais.

Definição de Raíz Enésima Aritmética e Potência de Expoente Racional;

Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, $n \geq 1$, é demonstrável que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$.

Ao número b chamaremos de ***raíz enésima aritmética*** de a e indicamos pelo símbolo: $\sqrt[n]{a}$, onde a é o ***radicando*** e o n é o ***índice***.

A ***potência de expoente racional*** de $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{N}^*)$, define-se como potência de base a e base expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}\ (\star)$$

[Obs. 1] *Note que* $\sqrt{36} = 6$ *e não* $\sqrt{36} = \pm 6$*, mas,* $\pm\sqrt{36} = \pm 6$ *pois note que o radical não é o culpado do sinal que antecede.*

Propriedades: Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

[R1] $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{n \cdot p}}$ para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$

[R2] $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

[R3] $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

[R4] $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$

[R5] $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

EXERCÍCIOS:

15. $\Rightarrow [p^*][\boldsymbol{H}]$ Se $x \in \mathbb{C}$, podemos concluir que $x^2 + 1 = 0$ admite como raízes $x = \pm 1\boldsymbol{i}$?

16. $\Rightarrow [p^*]$ Mostre que $\sqrt[m]{a^m} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}_+$ e $\forall m \in \mathbb{N} \mid m \geq 1$

17. $\Rightarrow [p^*][H]$ Mostre que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{n \cdot p}}$

18. $\Rrightarrow [p^*]$ Mostre que $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. *Dica: Utilize* $(\star)$ *e as propriedades da potenciação.*

19. $\Rrightarrow [p^*]$ Mostre que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$. *Dica: Utilize* $(\star)$ *e as propriedades da potenciação.*

20. $\Rrightarrow [p^*]$ Mostre que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$. *Dica: Utilize* $(\star)$ *e as propriedades da potenciação.*

21. $\Rrightarrow [p^*]$ Mostre que $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

22. Classifique em Verdadeira (V) ou Falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

Cuidado! $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}_+$, *lembre-se que* $\mathbb{R}$ *são todos os números reais, e* $\mathbb{R}_+$ *são todos os números reais POSITIVOS!*

a) $\sqrt[3]{27} = 3$

b) $\sqrt{4} = \pm 2$

c) $-\sqrt[2]{9} = -3$

d) $\sqrt[4]{1} = 1$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

f) $\sqrt[3]{0} = 0$

g) $\sqrt{x} = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

h) $\sqrt{x^{10}} = x^5, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{x^6} = x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$

d) $\sqrt{(x-1)^2} = (x-1), \forall x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1$

e) $\sqrt{(x-3)^3} = (3-x), \forall x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3$

23. Determine a raiz quadrada aritmética dos seguintes:

Exemplo: $(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & se\ x > 1 \\ 0, & se\ x = 1 \\ 1-x, & se\ x < 1 \end{cases}$

a) $(x+2)^2$ b) $(2x-3)^2$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) $4x^2 + 4x + 1$

24. Simplifique os radicais: *Obs.: Os itens* a, b, c *e* d *estarão como exemplos:*

a) $\sqrt[3]{64} \leftrightarrow \sqrt[3]{2^6} \leftrightarrow 2^2 \leftrightarrow 4$

b) $\sqrt{576} \leftrightarrow \sqrt{2^6 \cdot 3^2} \leftrightarrow \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^2} \leftrightarrow 2^3 \cdot 3 \leftrightarrow 24$

c) $\sqrt{12} \leftrightarrow \sqrt{2^2 \cdot 3} \leftrightarrow 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{2^7} \leftrightarrow \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} \leftrightarrow \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} \leftrightarrow 2^{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} \leftrightarrow 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} \leftrightarrow 4\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{144}$ g) $\sqrt[4]{625}$ i) $\sqrt[4]{512}$ k) $\sqrt{196}$ m) $\sqrt[3]{72}$

f) $\sqrt[3]{729}$ h) $\sqrt[2]{128}$ j) $\sqrt{324}$ l) $\sqrt{18}$

25. Simplifique:

a) $\sqrt{81x^3}$ b) $\sqrt{45x^3y^2}$ c) $\sqrt{12x^4y^5}$ d) $\sqrt{8x^2}$

26. Reduza ao mesmo índice:

a) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{5}$

Solução: O mínimo comum entre 2, 3 e 4 é 12; então, reduzindo ao índice 12 e utilizando da propriedade [R1] da qual nos permite fazer tal operação sem alterar o resultado:

$$\sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 6]{3^{1\cdot 6}} = \sqrt[12]{3^6} \therefore \sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 4]{2^{1\cdot 4}} = \sqrt[12]{2^4} \therefore \sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot 3]{5^{1\cdot 3}} = \sqrt[12]{5^3}$$

b) $\sqrt{2};\ \sqrt[5]{5};\ \sqrt[5]{3}$

c) $\sqrt{3};\ \sqrt[3]{4};\ \sqrt[4]{2};\ \sqrt[6]{5}$

d) $\sqrt[3]{2^2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{5^3}$

e) $\sqrt[3]{3^2}, \sqrt{2^3}, \sqrt[5]{5^4}, \sqrt[6]{2^5}$

27. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt{3} : \sqrt{12}$

b) $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

28. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{30}$ c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$

d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$

e) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$

f) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}$

g) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$

h) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$

i) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{2}$

j) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$

k) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[2]{5}$

l) $\sqrt[3]{3} : \sqrt{2}$

m) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$

n) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{2}$

o) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[3]{6} : \sqrt{15}$

29. Efetue as operações:

a) $(\sqrt{12}-2\sqrt{7}+3\sqrt{75})\sqrt{3}$

b) $(3+\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})$

c) $(5-2\sqrt{3})^2$

d) $2\sqrt{3}(3\sqrt{5}-2\sqrt{20}-\sqrt{45})$

e) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5}$

f) $(6+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

g) $(3+\sqrt{5})(7-\sqrt{5})$

h) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-4)$

i) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

j) $(2\sqrt{5}-4\sqrt{7})(\sqrt{5}+2\sqrt{7})$

k) $(3+\sqrt{2})^2$

l) $(4-\sqrt{5})^2$

m) $(2+3\sqrt{7})^2$

n) $(1-\sqrt{2})^4$

31. Efetue:

a) $(4\sqrt{8}-2\sqrt{18}) : \sqrt[3]{2}$

b) $(3\sqrt{12}+2\sqrt{48}) : \sqrt[4]{3}$

c) $(3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50})(\sqrt[4]{2})$

d) $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{4}) : \sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$

f) $\left(\sqrt{7+\sqrt{24}}\right)\left(\sqrt{7-\sqrt{24}}\right)$

g) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)$

h) $(\sqrt{2})\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$

32. Simplifique:

a) $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)(\sqrt{a^2-b})$

b) $(2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}) : \sqrt{xy}$

c) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{ab}+b\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{ab}$

d) $\left(\sqrt{p+\sqrt{p^2-1}}\right)\left(\sqrt{p-\sqrt{p^2-1}}\right)$

e) $\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-y^3}}\right)\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-y^3}}\right)$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$

h) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

33. Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{5}{3-\sqrt{7}}$

d) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

g) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

h) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

i) $\frac{4}{2\sqrt{3}}$

j) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

k) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

l) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$

m) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

n) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

o) $\frac{2}{3+2\sqrt{2}}$

p) $\frac{6}{5-3\sqrt{2}}$

q) $\frac{1}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}$

r) $\frac{4}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

s) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

t) $\frac{5}{2-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

u) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$

v) $\frac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}-1}$

34. Chamam-se **cosseno hiperbólico** de x e **seno hiperbólico** de x, e representam-se respectivamente por $\cosh x$ e $\sec x$, os números:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{e,} \qquad \sec x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Calcule $(\cosh x)^2 - (\sec x)^2$

Referências:

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar. Logaritmos. Vol. 2. 10° Edição. Atual Editora. São Paulo – SP. 2013.