Matemática B - ONG em Ação

Gustavo Henrique Silva Sarturi
Bacharelado em Matemática Industrial - UFPR
gustavo.sarturi@ufpr.br

1 Operações Aritméticas e Algébricas Elementares

1.1 Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos é algo de extrema importância na Matemática, é uma das partes mais fundamentais da Matemática e com notórias aplicações em todas em grande parte das áreas de estudo da Matemática. Atualmente, os conjuntos englobam os Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos, que são denotados respectivamente por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. À princípio, iremos trabalhar até o corpo dos Reais (seja lá o que for corpo, no momento). Vamos ilustrar como são tais conjuntos citados.

- **Naturais** $\mathbb{N}$: $\{1,2,3,4,5,\cdots\}$
- **Inteiros** $\mathbb{Z}$: $\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$
- **Racionais** $\mathbb{Q}$**:** $\{\frac{p}{q}|p,q\in\mathbb{Z}$ e $q\neq 0\}$
- **Irracionais** $\mathbb{I}$: É o subconjunto dos números reais que não podem ser obtidos através da divisão de dois números inteiros.
- **Reais** $\mathbb{R}$ **:** Engloba todos os subconjuntos anteriores.
- **Complexos** $\mathbb{C}$ **:** Engloba todos os subconjuntos anteriores e os números imaginários $1,i,-1,-i$. A ênfase neles será dada brevemente.

2 Operações Aritméticas:

Definição 2.1. *Dados dois números racionais $r=\frac{m}{n}$ e $s=\frac{p}{q}$, definimos:*

1.

$$r+s=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$$

2.

$$r\cdot s=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

Observação 2.1. *Para o conjunto dos reais, sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$, são válidos as seguintes operações:*

1. $a+b=b+a$ *(Associatividade da adição);*
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ *(Comutatividade da adição);*
3. $a+0=a$ *(Existência do Elemento Neutro da Adição);*
4. $\exists(-a)\in\mathbb{R}|a+(-a)=0$ *(Elemento Simétrico)*
5. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *(Associatividade do produto);*
6. $a\cdot b=b\cdot a$ *(Comutatividade do produto);*
7. $a\cdot 1=a$ *(Existência do Elemento Neutro do Produto);*
8. $\exists a^{-1}\in\mathbb{R}|a\cdot a^{-1}=1$ *(Elemento Inverso);*
9. $a\cdot(b+c)=ab+ac$ *(Distribuitividade);*

2.1 Potências e Radiciação

2.1.1 Potenciação

Definição 2.2. *Seja $a,n\in\mathbb{R}$ definimos potência de base a e expoente n o número a^n ta que:*

$$\left\{\begin{array}{c} a^0=1,\forall a\in\mathbb{R}^* \\ a^n=a^{n-1}\cdot a \end{array}\right. \quad \Gamma$$

Decorre imediatamente da definição que: Sendo $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq 2$ temos no entanto que a^n é o produto de n fatores iguais a a, no caso:

$$a^n=a^{n-1}\cdot a=a\cdot a\cdot a\cdots a \text{ (n vezes)}$$

Propriedades :

- $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, \forall a\neq 0$
- $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ com $b\neq 0$ ou $n\neq 0$
- $(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}, b\neq 0$
- $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

Definição 2.3. *Dado um número real a, não nulo, e um número n natural, define-se a potência a^{-n} pela relação:*

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

2.1.2 Radiciação

Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, $n \geq 1$, é demonstrável que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$. Ao número b chamaremos de raíz enérsima aritmética de a e indicamos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, onde a é o radicando e n é o índice (ou radical). Assim, temos a seguinte definição:

Definição 2.4. *A **Potência de Expoente Racional** de $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, define-se como potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Uma observação muito importantíssima, $\sqrt{36} = 6$ e não ± 6, porém, $\pm\sqrt{36} = \pm 6$, pois note que o radical não é o culpado pelo sinal que antecede. Isso é muito importante por definimos $a \geq 0$.

Propriedades

Decorre imediatamente da definição e propriedades da potenciação que, se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$,temos:

- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ para $b \neq 0$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

2.2 Exercícios

1. Utilizando as propriedades apresentadas, mostre que $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$.

2. Calcule

   (a) $(-3)^3$
   (b) $(-2)^1$
   (c) 3^4
   (d) 1^7
   (e) $(\frac{2}{3})^3$
   (f) $(-\frac{1}{3})^4$
   (g) $(\frac{1}{2})^3$
   (h) $(\frac{2}{3})^0$
   (i) -2^3
   (j) $-(-\frac{1}{3})^4$
   (k) $(-1)^10$
   (l) $(-1)^{13}$
   (m) 0^7
   (n) $(-4)^0$
   (o) -5^0
   (p) $-(-1)^{2018}$

3. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) cada uma das sentenças abaixo:

   (a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$
   (b) $\frac{3^6}{3^2} = 3^3$
   (c) $2^3 \cdot 3 = 6^3$
   (d) $(2+3)^4 = 2^4 + 3^4$
   (e) $(5^3)^2 = 5^6$
   (f) $(-2)^6 = 2^6$
   (g) $\frac{2^7}{2^5} = (-2)^2$
   (h) $5^2 - 4^2 = 3^2$
   (i) $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$
   (j) $(\pi + 2)^{-2} = \pi^{-2} + 2^{-2}$
   (k) $\pi^1 + \pi^{-1} = 1$
   (l) $\frac{5^2}{5^{-6}} = 5^8$
   (m) $(2^{-3})^{-6} = 2^6$

4. Simplifique as expressões, supondo $a \cdot b \neq 0$

   (a)
   $$(a^2 \cdot b^3)^2 \cdot (a^3 \cdot b^2)^3$$

   (b)
   $$\frac{(a^4 \cdot b^2)^3}{(a \cdot b^2)^2}$$

(c)
$$[(a^3 \cdot b^2)^2]^3$$

(d)
$$\left(\frac{a^4 \cdot b^3}{a^2 \cdot b}\right)^5$$

(e)
$$\frac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (a^3 \cdot b^4)^2}{(a^3 \cdot b^2)^3}$$

(f)
$$\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2} \cdot (a \cdot b^{-2})^3}{(a^{-1} \cdot b^2)^{-3}}$$

5. Se a e b são números reais, então, em que condições $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?

6. Determine o menor número inteiro positivo x para que $2940 \cdot x = M^3$, em que M é um número inteiro.

7. Simplifique os radicais:

(a) $\sqrt[3]{64}$ (b) $\sqrt{576}$ (c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt[3]{2^7}$ (e) $\sqrt{144}$ (f) $\sqrt[3]{729}$ (g) $\sqrt{324}$ (h) $\sqrt{196}$ (i) $\sqrt[4]{625}$ (j) $\sqrt{18}$ (k) $\sqrt{128}$ (l) $\sqrt[3]{72}$ (m) $\sqrt[4]{512}$

8. Simplifique as expressões:

(a) $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$
(b) $5\sqrt{108} + 2\sqrt{243} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}$
(c) $\sqrt{20} - \sqrt{24} + \sqrt{125} - \sqrt{54}$
(d) $\sqrt{2000} + \sqrt{200} + \sqrt{20} + \sqrt{2}$
(e) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$
(f) $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$
(g) $a\sqrt[3]{ab^4} + b\sqrt[3]{a^4b} + \sqrt[3]{a^4b^4} - 3ab\sqrt[3]{ab}$

9. Simplifique:

(a) $\sqrt{81x^3}$ (b) $\sqrt{45x^3y^2}$ (c) $\sqrt{12x^4y^5}$ (d) $\sqrt{8x^2}$

10. Reduza ao mesmo índice:

(a) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{5}$
(b) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[5]{3}$
(c) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{5}$
(d) $\sqrt[3]{2^2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{5^3}$
(e) $\sqrt[3]{3^2}, \sqrt{2^3}, \sqrt[5]{5^4}, \sqrt[6]{2^5}$

[11-50] Efetue as operações indicadas com as raízes:

11. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
12. $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$
13. $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$
14. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$
15. $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2}$
16. $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$
17. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$
18. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{30}$
19. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$
20. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$
21. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$
22. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

23. $\sqrt{\frac{6}{3}}$
24. $\sqrt{24}:\sqrt{6}$
25. $\sqrt[3]{10}:\sqrt[3]{2}$
26. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$
27. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{5}$
28. $\sqrt[3]{3}:\sqrt{2}$
29. $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$
30. $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$
31. $\frac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt{15}}$
32. $(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$
33. $(3+\sqrt{2})\cdot(5-3\sqrt{2})$
34. $(5-2\sqrt{3})^2$
35. $2\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{5}-2\sqrt{20}-\sqrt{45})$
36. $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$
37. $(6+\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2})$
38. $(3+\sqrt{5})\cdot(7-\sqrt{5})$
39. $(\sqrt{2}+3)\cdot(\sqrt{2}-4)$
40. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\cdot(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})$
41. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\cdot(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})$
42. $(1-\sqrt{2})^4$
43. $(4-\sqrt{5})^2$
44. $(2\sqrt{5}-4\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}+2\sqrt{7})$
45. $(3+\sqrt{2})^2$
46. $(4\sqrt{8}-2\sqrt{18}:\sqrt[3]{2}$
47. $(3\sqrt{12}+2\sqrt{48}):\sqrt[4]{3}$
48. $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1}$
49. $\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{24}}$
50. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

3 Funções Polinomiais do 1° e 2° grau

1. Construa o gráfico cartesiao das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

   (a) $y=2x-1$
   (b) $y=x+2$
   (c) $y=3x+2$
   (d) $y=\frac{2x-3}{2}$
   (e) $y=-3x-4$
   (f) $y=-x+1$
   (g) $y=-2x+3$
   (h) $y=\frac{4-3x}{2}$

2. Resolva analitcamente e graficamente o sistema de equações:

   (a) $$\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$$
   (b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} 3x-2y=-14 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} 2x-5y=9 \\ 7x+4y=10 \end{cases}$
   (e) $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 6x+7y=4 \end{cases}$
   (f) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$
   (g) $\begin{cases} 2x+5y=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$

3. Resolva os sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{x+y+1} - \frac{2}{2x-y+3} = \frac{5}{12} \\ \frac{2}{x+y+1} + \frac{3}{2x-y+3} = 1 \end{cases}$

4. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos:
   (a) (2,3) e (3,5)
   (b) (1,-1) e (-1,2)
   (c) (3,-2) e (2,-3)
   (d) (1,2) e (2,2)

Mais exercícios serão atualizados em breve...

4

Referências