1 Lista IV - Exercícios

1.1 Lista para entregar

Data de entrega: 25/05/2019.
"Lembre-se: Errar continua sendo uma tentativa"

1. Dada as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) $|A|$
(b) det(B)
(c) $|C|$
(d) det(AC)
(e) $|BC|$
(f) det(BA)

2. Dada as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 18 & 195 & 3 \\ 1 & 100 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) det(A)
(b) det(B)
(c) det(C)
(d) det(D)
(e) det(E)
(f) det(F)

3. Determine o conjunto solução da equação:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

.

Obs.: Se você ainda não viu equações exponenciais, tente pensar numa solução para esse problema. Se sentir muitas dificuldades, volte um outro dia quando aprender e tente novamente, não se sinta mal se não conseguir resolver.

4. Se A é uma matriz quadrada triangular superior ou triangular inferior, mostre que $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, ou seja, que o determinante é o produto dos elementos das diagonais.

Dica: *Faça um exemplo numérico para intuir, e depois, tente generalizar para uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ triangular superior ou inferior qualquer utilizando as definições. Você pode consultar as notas de aula para rever as definições.*

5. Mostre que:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$$

Esse determinante é chamado de **determinante de Vandermonde**.

6. A **matriz inversa de** A é denotada por A^{-1} e satisfaz a seguinte relação: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_d$ onde I_d é a matriz identidade. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2, temos que a inversa de A satisfaz a seguinte igualdade

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sendo assim, dada as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcule:

(a) A^{-1} (b) B^{-1} (c) C^{-1}

1.2 Exercício Extra

7. Desafio - Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e o vetor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Faça o que se pede:

(a) Mostre, utilizando propriedades matriciais que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ é equivalente a resolver $(A - \lambda I_d)\vec{x} = 0$.

(b) Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_d)$.
Dica: $p(\lambda)$ é um polinômio de segundo grau que chamamos de "Polinômio Característico".

(c) As raízes de $p(\lambda) = 0$ são chamadas de *autovalores* associados à matriz A. Neste caso, quem são os autovalores associados à Matriz?
Dica: Calcule $p(\lambda) = 0$.

(d) Se λ_1 e λ_2 são raízes de $p(\lambda)$, resolva o sistema: $(A - \lambda_1 I_d)\vec{x} = 0$ e $(A - \lambda_2 I_d)\vec{x} = 0$.

(e) Comente sobre o que você notou à respeito dos vetores encontrados ao substituir na equação matricial, λ_1 e λ_2 respectivamente.