1 Lista 11 - Exercícios: Números Complexos

1.1 Introdução, Operações Básicas e Forma Trigonométrica

Lembre-se que $i^0 = 1, i^1 = i,\ i^2 = -1$ *e* $i^3 = -i$

1. Dados dois números complexos, $z = a + bi$ e $w = c + di$, qual a condição para que o produto, $z \cdot w$, seja um número real?

2. Prove que $(1 - i)^2 = -2i$ e calcule $(1 - i)^{96} + (1 - i)^{97}$

3. Calcule:

   (a) $(3 + 2i) + (2 - 5i)$
   (b) $(1 + i) + (1 - i) - 2i$
   (c) $(3 + 2i)^2$
   (d) $(5 - i)^2$
   (e) $\dfrac{1 + i}{3 + 4i}$
   (f) $\dfrac{\sqrt{4} + \sqrt{21}i}{\sqrt{4} - \sqrt{21}i}$

4. Provar que $(1 + i)^2 = 2i$ e coloar na forma algébrica o número

$$z = \frac{(1 + i)^{80} - (1 + i)^{82}}{i^{96}}$$

5. Determinar $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ de modo que se tenha:

   (a) $2 + 3yi = x + 9i$
   (b) $(x + yi)(3 + 4i) = 7 + 26i$
   (c) $(x + yi)^2 = 4i$
   (d) $(3 - i)(x + yi) = 20$

6. Prove que para todo $z \in \mathbb{R}$

   (a) $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$
   (b) $z - \bar{z} = 2 \cdot Im(z)$
   (c) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

7. Provar para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ que

$$\frac{1 + sin(x) + i \cdot cos(x)}{1 - sin(x) + i \cdot cos(x)} = tan(x) + i \cdot sec(x)$$

8. Determinar o módulo, o argumento principal, colocar na forma trigonométrica e dar a representação gráfica dos seguintes números:

   (a) 4
   (b) $1 + i\sqrt{3}$
   (c) $3i$
   (d) $-\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$
   (e) -5
   (f) $-2i$
   (g) $-5 - 5i$
   (h) $2 - 2i$

9. Colocar na forma algébrica os seguintes números:

   (a) $3\,(\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi))$

   (b) $4\,(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{11\pi}{6}))$

   (c) $2\,(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$

   (d) $5\,(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2})$

10. Se $e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$, calcule $e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

11. Interprete geometricamente a soma de dois números complexos