[!] Esse documento está sob constantes atualizações, qualquer erro de ortografia, cálculo, favor comunicar. Última atualização: 01/11/2018.

1 Números Complexos

1.1 Introdução

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos Reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

Se tomarmos dois elementos (a, b) e (c, d) de $\mathbb{R}^2$, podemos definir as seguintes operações:

1. Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c\ e\ b = d$
2. Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

O conjunto dos números complexos (denotado por $\mathbb{C}$) é o conjunto dos pares ordenados de números reais para as quais estã definidas as operações acima. É usual representa cada elemento $(x, y) \in \mathbb{C}$ com o símbolo z, logo:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y)\ sendo\ x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Teorema (Adição em $\mathbb{C}$) A operação de adição define em $\mathbb{C}$ uma estrutura com as seguintes propriedades:

1. Propriedade associativa;
2. Propriedade comutativa;
3. Existência do elemento neutro; $\exists\ e_a \in \mathbb{C} \mid z + e_a = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$
4. Existência do elemento simétrico; $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists\ z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = e_a$

Teorema (Multiplicação em $\mathbb{C}$) A operação de multiplicação define em $\mathbb{C}$ uma estrutura com as seguintes propriedades:

1. Propriedade associativa;
2. Propriedade comutativa;
3. Existência do elemento neutro; $\exists\ e_m \in \mathbb{C} \mid z \cdot e_m = z,\ \forall z \in \mathbb{C}$
4. Existência do elemento inverso; $\forall z \in \mathbb{C}^*\ \exists\ z'' \in \mathbb{C} \mid z \cdot z'' = e_m$

Exercício: Prove os Teoremas enunciados;

Divisão: Decorre do último item do Teorema anterior que, dados $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$ e $z_2 = (c, d)$, existe um único $z \in \mathbb{C}$ ta que $z_1 \cdot z = z_2$. Mostre que

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{ca + db}{a^2 + b^2}, \frac{da - cb}{a^2 + b^2} \right)$$

Teorema (Distribuição) Em $\mathbb{C}$ é válido a seguinte relação:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \; \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

.

Demonstração: À cargo do leitor.

1.2 Forma Algébrica

Se considerarmos um subconjunto $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo a segunda componente é nula, ou seja:

$$\mathbb{R}' = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid b = 0\}$$

E considerarmos uma aplicação de f, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$, verificamos que tal aplicação é sobrejetora, pois, todo par de $\mathbb{R}'$ é correspondente, segundo f de $x \in \mathbb{R}$, além disso, se tomarmos $x, x' \in \mathbb{R}$ com $x \neq x'$ temos que $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ e $(x', 0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, ou seja, a aplicação é injetora. Como a aplicação é injetora e sobrejetora, temos então que ela é bijetora. Além do mais, note que a aplicação f conserva as operações de adição de multiplicação. Note que $a + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ está associado a $(a + b, 0) \in \mathbb{R}'$, ou seja:

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

. É fácil de ver que com o produto ab ocorre o mesmo, e que

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

Como existe uma bijeção nesta aplicação que conserva as operações de soma e produto, dizemos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$ são *isomorfos*. Devido a esse isomorfismo, operar com $(x, 0)$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com x, o que justifica a igualdade $x = (x, 0), \forall \; x \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ passa a ser considerado subconjunto do conjuntos dos $\mathbb{C}$, ou seja, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;

Definimos então, **unidade imaginária** e indicamos por i, o número complexo $(0, 1)$. Note que com isso, obtemos que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Que é a propriedade básica da unidade imaginária, ou seja: $i^2 = -1$

Como isso podemos obter informações quanto $i^0, i^1, i^3, \cdots$ por exemplo. Fica como exercício então mostrar que:

$$i^{4n} = 1, \; i^{4n+1} = i, \; i^{4n+2} = -1, \; i^{4n+3} = -i$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Note que, dado um número complexo $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$$

Como $(0, 1)$ por definição é i, temos então:

$$z = x + yi \tag{3}$$

Ou seja, todo número complexo pode ser escrito sob essa forma que chamamos de "forma algébrica". O número real x é chamado de parte real de z, enquanto que o número real y é a parte imaginária de z. Denotamos respectivamente por $Re(z)$ e $Im(z)$. Denotar dessa forma é muito bom pois, a multiplicação fica mais "natural", ao invés de calcularmos a multiplicação da forma como definimos inicialmente, podemos simplesmente fazer um produto usual, ou seja:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

1.3 Conjugado de C

Definição: O conjugado de um número complexo $z = x + yi$ é denotado por $\bar{z}$ e definido como

$$\bar{z} = x - yi$$

Teorema Para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se que:

1. $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$;
2. $z - \bar{z} = 2 \cdot Im(z) \cdot i$;
3. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Teorema Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Voltando ao caso da divisão, observe que agora possuímos um processo mais prático de fazer a divisão entre dois números complexos:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{da - cb}{a^2 + b^2} i$$

Lembre-se, não leve isso como uma fórmula, pois, aparece naturalmente. Concluímos então que basta multiplicarmos a nossa expressão pelo conjungado no numerador e denominador (para manter a igualdade).

2 Forma Trigonométrica

**Seção em construção; porém, vai um resumo:

Definição: A norma de um número complexo $z = x + yi$ é um número real e positivo:

$$N(z) = x^2 + y^2$$

Definição: O módulo de um número complexo $z = x + yi$ é um número real e positivo que satisfaz:

$$|z| = \rho = \sqrt{N(z)}$$

Teorema Se z_1 e z_2 são dois números complexos quaisquer, então:

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $z_2 \neq 0$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Definição: O argumento de um número complexo, não nulo, o ângulo θ tal que:

$$cos\theta = \frac{x}{\rho} \qquad sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

- Em sala de aula: Plano de Argand Gauss,

Dado um número complexo $z = x + yi$, não nulo, note que:

$$z = x + yi = \rho\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{\rho}i\right) = \rho(cos\theta + i \cdot sin\theta)$$

Que é a forma polar (ou trigonométrica) de z.

- Em sala de aula serão discutidos a potenciação, radiciação, equações binômias e trinômias com números complexos. Deixarei abaixo apenas algumas fórmulas e lembretes para eu poder continuar escrevendo em breve. Não entraremos muito em detalhes, porém, é bom saber e ter uma ideia de como funciona, se cair numa segunda fase, as fórmulas provavelmente serão dadas.

1^o Fórmula de Moivre

$$z^n = \rho^n(cos\theta + i \cdot sin\theta) \tag{4}$$

2^o Fórmula de Moivre

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(cos\left(\frac{\theta}{n} + K \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\theta}{n} + K \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) \tag{5}$$

onde $z_k = z^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow z_k^n = z$

Equação Binômia

Chama-se equação binômia toda equação redutível à forma:

$$ax^n + b = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

Equação Trinômia

Chama-se equação binômia toda equação redutível à forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

3 Exercícios

**À ser atualizado!

1. Efetuar as seguintes operações indicadas:

   (a) $(6+7i)(1+i)$
   (b) $(5+4i)(1-i)+(2+i)i$
   (c) $(1+2i)^2-(3+4i)$
   (d) $(3+2i)+(2-5i)$
   (e) $(5-2i)-(2+8i)$
   (f) $(1+i)+(1-i)-2i$
   (g) $(6+7i)-(4+2i)+(1-10i)$
   (h) $(2-3i)(1+5i)$
   (i) $(4-3i)(5-i)(1+i)$
   (j) $(1+2i)(2+i)$
   (k) $(7+2i)(7-2i)$
   (l) $(3+2i)^2$
   (m) $(5-i)^2$
   (n) $(1+i)^3$
   (o) $(5-i)^2$
   (p) $(3+2i)^2$

2. Provar que $(1+i)^2=2i$ e colocar na forma algébrica o número:

$$z=\frac{(1+i)^{80}-(1+i)^{82}}{i^{96}}$$

3. Calcule as seguintes potências de i

   (a) i^{76} (b) i^{110} (c) i^{97} (d) i^{503}

4. Provar que $(1-i)^2=-2i$ e calcular $(1-i)^{96}+(1-i)^{97}$

5. Determinar $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$ que satisfaza as seguintes equações:

   (a) $2+3yi=x+9i$
   (b) $(x+yi)(3+4i)=7+26i$
   (c) $(x+yi)^2=4i$
   (d) $3+5ix=y-15i$
   (e) $(x+yi)(2+3i)=1+8i$
   (f) $(3+yi)+(x-2i)=7-5i$
   (g) $(x+yi)^2=2i$
   (h) $(2-x+3y)+2yi=0$
   (i) $(3-i)(x+yi)=20$

6. Qual é a condição para que o produto de dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ dê um número real?

7. Encontre a solução geral para a equação $y=ax^2+bx+c$ sabendo que $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ e $b^2>4ac$, ou seja, o discriminante é tal que $\Delta<0$.

8.

[!] Mais exercícios serão adicionados em breve!