1 Lista VII - Exercícios

1. **(FGV-2003) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 3 e, seja 0 a matriz nula também de ordem 3. Assinale a alternativa correta:**

   Resposta: Item (d) é a Correta.

   (a) Falso. Foi dado um contra-exemplo em sala de aula, de fato, se a e b são tais que $a, b \in \mathbb{R}$, ou seja, números reais, $a \cdot b = 0$ implica que ou $a = 0$ ou $b = 0$, porém, se tratando de matrizes, a afirmação é falsa. Contra exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Note que as matrizes não são nulas mas, a operação de multiplicação matricial entre elas gera uma matriz nula.

   (b) Falso. De fato, se tratando de matrizes $2A = 2 \cdot A$. Atenção no ponto, que está indicando multiplicação de matriz por escalar (número real). Porém, se tratando de determinantes, não é verdade. No caso de determinantes, $\det(2A) = 2^k \det(A)$ onde k é a ordem da matriz A. Fica como exercício encontrar um contra-exemplo.

   (c) Falso. Contra exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Note que $AB = 0$ e $AC = 0$ mas, $B \neq C$. Logo, $AB = AC$ não implica necessariamente que $B = C$.

   (d) Verdadeira. Demonstração: Sejam A, B, C matrizes 3×3 (hipótese da questão). Fazendo $D = AB = (d_{ik})$, $E = (AB) = e_{il}$ e $F = BC = f_{jl}$, temos:

$$E = (AB)C = e_{il} = \sum_{k=1}^{3} d_{jk} \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot f_{jl} = A(BC)$$

   . Logo, $(AB)C = A(BC)$

   (e) Falso. Contra exemplo:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 4$$

   mas

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) + \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 + 1 = 1$$

2. **Rick Deckard é um caçador de androides, mais especificamente, replicantes, que são androides de bioengenharia. Numa tentativa de encontrar Rachael Tyrell, o computador gerou as coordenadas de sua localização, porém, houve um erro e as coordenadas saíram incompletas, no caso, o computador gerou as seguintes coordenadas:** $-25.4343642, -(?)9.2743365$, **onde (?) é o algarismo que falta para saber a localização exata de Rachael.**

   Após algumas pesquisas, Rick Deckard recebeu as seguintes matrizes

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   , e, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **Além disso, descobriu que o valor de (?) é o mesmo que o valor de máximo de uma função quadrática** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **dada pela seguinte expressão matricial** $f(x) = -\det(A(0)B^T - xI_d)$ **onde** I_d **é a matriz identidade. Dadas as informações, qual o valor de máximo de** $f(x)$**? Sugestão: A expressão quadrática surge ao resolver o determinante. Lembre-se que** x **é uma variável e** $A(\theta)$ **é uma função que gera uma matriz diferente para cada valor de** $\theta \in \mathbb{R}$.

   Resposta: (c) 4

   Para facilitar os cálculos, calculemos primeiramente $A(0)B^T - xI_d$, no caso:

$$A(0)B^T - xI_d = \begin{pmatrix} \cos(0) & -sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^T - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & 6-x \end{pmatrix}$$

   Calculando o seu determinante (atente-se ao sinal, pois a expressão pedia para calcular $f(x) = -\det(A(0)B^T - xI_d)$

$$f(x) = -\det(A(0)B^T - xI_d) = -\det \begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & 6-x \end{pmatrix} = -(2-x)(6-x) = -x^2+8x-12$$

   O valor de x_v da equação quadrática é dada por:

$$x_b = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4$$

   O valor de máximo (y_v) é dada por $f(y_v) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 12 = 4$. Logo, alternativa (c) de Cueio.

3. **(UFMA – Modificado) Dada a matriz abaixo:**

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,04 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \end{pmatrix}$$

Calcule $\det(A^T)$**.**

Resposta: (d) 0.

Como $\det(A^T) = \det(A)$, e, como, existem ao menos uma linha proporcional a outra (note que a $linha1 = 10 \cdot linha2$), então, por teorema, o determinante é nulo.